На правах рукописи

Чаплыгина Елена Викторовна

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ И ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений физико-математического факультета в ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет».

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор Зарубин Александр Николаевич

Официальные оппоненты: Псху Арсен Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, зав. отделом дробного исчисления

Андреев Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»

Ведущая организация ФГБОУ ВПО «Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики

Защита диссертации состоится 16 октября 2013 года в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, БелГУ, корп. 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного национального исследовательского университета.

Автореферат разослан « ___ » _____________ 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гриценко Светлана Александровна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория уравнений смешанного типа, возникшая в 20–50 годы прошлого столетия благодаря работам С.А. Чаплыгина, Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа, М.А. Лаврентьева, получила значительное развитие в силу многочисленных приложений в трансзвуковой газовой динамике, гидродинамике, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, теории плазмы, при моделировании биологических процессов.

В работах Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, А.П. Солдатова, С.П. Пулькина, В.И. Жегалова, Т.Д. Джураева, Л.С. Пулькиной, К.Б. Сабитова, А.Н. Зарубина, О.А. Репина, А.А. Килбаса, А.В. Псху, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова и других математиков, теория уравнений смешанного типа развивалась в различных направлениях.

На рубеже 60–90 годов XX века возросший интерес к задачам управления системами с последействием, исследованиям упругих деформаций многослойных пластин и оболочек, управления плазмой, потребовал развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в том числе уравнений смешанного типа, с отклоняющимся аргументом.

Начально-краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих преобразования аргумента искомой функции, относятся к нелокальным.

Теория нелокальных задач Трикоми для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с операторами Лаврентьева-Бицадзе и Геллерстедта в главной части и сосредоточенными отклонениями некарлемановского типа была построена А.Н. Зарубиным.

Прямые и обратные задачи для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной исследовал М.В. Бурцев. В работах А.А. Андреева и И.Н. Саушкина рассматривались аналоги задачи Трикоми в неограниченных симметричных областях, порожденных операторами типа Лаврентьева-Бицадзе с одной, двумя перпендикулярными и двумя параллельными линиями вырождения типа и возмущенных значениями второй производной искомой функции, вычисленной в инволютивных (карлемановских) точках.

В данной диссертации впервые рассматриваются в различных областях задачи Геллерстедта («внутренние» и «внешние») для нелокальных уравнений смешанного типа с разностными и дифференциально-разностными операторами, имеющими некарлемановские сдвиги запаздывающего и опережающе-запаздывающего типа

$$L(u(x,y)) \equiv u_{xx}(x,y) + sgny u_{yy}(x,y) = A_k u(x,y) \ \ (k = 0,1,2,3), \qquad (1_k)$$

Где $A_0 = R_x^{(1+H(y))\tau} H(x)$, $\quad A_1 = R_x^{\tau} H(x) \frac{\partial}{\partial x}$,

$$A_2 = (R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(2\tau - x) - 1)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\right),$$

$$A_3 = (R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(3\tau - x) - 1)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-sgny}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$0 < \tau \equiv const, H(\xi)$ – функция Хевисайда; $R_x^{\theta} -$ оператор некарлемановского сдвига, действующий по переменной x: $R_x^{\theta} p(x) = p(x - \theta)$.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование разрешимости новых нелокальных начально-краевых и начально-финально-краевых задач Геллерстедта для уравнений смешанного типа с запаздывающим и опережающе-запаздывающим аргументом соответственно.

Для обоснования корректности впервые поставленных задач необходимо доказательство теорем существования и единственности классических решений, что определяет структуру работы и содержание глав.

Методы исследования. В работе широко используются методы теории интегральных уравнений Фредгольма, сингулярных интегральных уравнений, аппарата специальных функций, дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, интегральные преобразования, метод вспомогательных функций («метод abc»).

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми в актуальной проблеме теории дифференциально-разностных уравнений в частных производных – проблеме решения задач Геллерстедта для уравнений смешанного типа с запаздывающим и опережающе-запаздывающим аргументом.

Основные результаты выносимые на защиту:

1. Доказательство теорем существования и единственности решения «внутренней» задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с кратным запаздыванием в искомой функции в ограниченной области.
2. Доказательство теорем существования и единственности решения «внешней» задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с

запаздывающим аргументом в производной первого порядка искомой функции в неограниченной области.

3. Доказательство теорем существования и единственности решения «внутренних» и «внешних» задач Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с опережающе-запаздывающим аргументом искомой функции и её производных первого порядка в ограниченных областях.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в качестве основы для дальнейшей разработки теории нелокальных задач для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа и систем дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с запаздывающими и опережающе-запаздывающими аргументами в областях изменения типа уравнения.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных результатов к исследованию различных физических и биологических смешанных процессов, в частности, в изучении колебания кристаллической решетки, в безмоментной теории многослойных оболочек с кривизной переменного знака, задач управления и др.

Апробация работы. Основные результаты и содержание работы докладывались и обсуждались на 6-й Международной конференции «АМАДЕ-2011» (г. Минск, 2011г.); на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» («СамДиф-2011», г. Самара); на Международной конференции «Комплексный анализ и его приложение в дифференциальных уравнениях и теории чисел» (г. Белгород, 2011г.); на Международной научно-практической конференции «Математика и её приложение» (г. Орел, 2011г.); на XIV Международной научной конференции им. акад. М. Кравчука (г. Киев, 2012г.); на 7-й Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ-2012, г. Минск); на XI Белорусской математической конференции (г. Минск, 2012г.); на Третьей Международной конференции по математической физике и ее приложениям (г. Самара, 2012г.); на Четвертой Международной конференции молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского (г. Донецк, 2012г.); на II Международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (г. Нальчик, 2012г.); на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Белгород, 2013г.); на научном семинаре кафедры функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (руководитель семинара – академик РАН, доктор физико-математических наук Е.И. Моисеев) (г. Москва, 2013г.); на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений в 2003–2013гг., г. Орел, ФГБОУ ВПО «Орловский Государственный Университет» (руководитель семинара – доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Зарубин).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1] – [17]. Публикации [5], [11], [17] выполнены в изданиях, рекомендованных ВАК. В статьях [2,3,4,5,7,8] научному руководителю принадлежит только постановка задач.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографического списка литературы, содержащего 103 наименования. Объем работы – 141 страница.

Содержание диссертационной работы.

Во **введении** дан краткий обзор важных публикаций по теме и анализ основных результатов диссертации.

Глава I посвящена уравнению Лаврентьева-Бицадзе с кратным запаздыванием в искомой функции и с запаздывающим аргументом в производной искомой функции. Доказываются теоремы единственности и существования.

§1. Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с разностным оператором в ограниченной области.

Уравнение (1_0) рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup I,$ где $D^+ = \bigcup_{k=0}^{n} D_k^+$ и $D^- = \bigcup_{k=0}^{2n+1} D_k^-$ ($n -$ фиксированное натуральное число) $-$ эллиптическая и гиперболическая части области D, причем $D_k^+ -$область, ограниченная отрезком $A_{2k}A_{2(k+1)}$ оси $y = 0,\ 2k\tau \le x \le 2(k+1)\tau$ и «нормальной» кривой $\rho_k:\ (x-(2k+1)\tau)^2 + y^2 = \tau^2$, расположенной в полуплоскости $y > 0$; $D_k^- = \left\{(x,y): k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\frac{\tau}{2} < y < 0\right\}$, $I = \{(x,y): 0 < x < 2(n+1)\tau, y = 0\}$.

Регулярным решением в области D назовем функцию $u(x,y)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, имеющую непрерывные первые производные в D, кроме, быть может, точек $A_{2k}(2k\tau,0)$ и $A_{2(k+1)}(2(k+1)\tau,0)$, в которых производные $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, дважды непрерывно дифференцируемую в D^+ и D^-.

Задача $\mathbf{G_0}$. Найти в области D регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1_0), удовлетворяющее краевым условиям

$u(x,y)|_{\rho_k} = \varphi_k(s), 0 \le s \le l \ (k = 0,1,\dots,n),$

$u(x,y)|_{y=x-(2k+1)\tau} = \psi_{k,k}(x), \left(2k+\frac{1}{2}\right)\tau \le x \le (2k+1)\tau \ (k = 0,1,\dots,n),$

$u(x,y)|_{y=-x+(2k+1)\tau} = \psi_{k,k+1}(x), (2k+1)\tau \le x \le \left(2k+\frac{3}{2}\right)\tau \ (k = 0,1,\dots,n),$

$\psi_{k,k}((2k+1)\tau) = \psi_{k,k+1}((2k+1)\tau)(k = 0,1,\dots,n),$

$\varphi_k(0) = \varphi_{k+1}(l) \quad (k = 0,1,\dots,n-1),$

условиям сопряжения $u(x,-0) = u(x,+0) = \omega(x), 0 \le x \le 2(n+1)\tau,$

$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), 0 < x < 2(n+1)\tau, \ x \ne 2k\tau \ (k = 1,2,\dots,n),$

где $\varphi_k(s)$, $\psi_{k,k}(x)$, $\psi_{k,k+1}(x)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции. Длина s $(0 \le s \le l)$ отсчитывается от точек $A_{2(k+1)}(2(k+1)\tau,0)$ в положительном направлении, а l – длина «нормальной» кривой ρ_k $(l = \pi\tau)$.

Теорема 1. Если существует решение задачи G_0, то оно единственно.

Единственность решения задачи G_0 доказывается с помощью энергетических неравенств на основе следующих утверждений.

Лемма 1. Пусть $u(x,y) \in C(\overline{D}_k^+) \cap C^2(D_k^+) -$ решение уравнения (1_0) в области D_k^+, обращающееся в нуль на кривой ρ_k и в областях $\overline{D}_{k-1}^+$ $(k = 1,2,\dots,n)$. Тогда

$$\beta_k = \int_{2k\tau}^{2(k+1)\tau} \omega(x)\nu(x)dx \le 0, \quad \beta_k + \iint_{D_k^+} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dxdy = 0.$$

Лемма 2. Если $u(x,y) \in C(\overline{D}_k^-) \cap C^2(D_k^-) -$ решение уравнения (1_0) в области D_k^-, обращающееся в нуль на характеристиках $y = x-(2k+1)\tau$, $y = -x+(2k+1)\tau$ и в областях $\overline{D}_{k-1}^-$ $(k = 1,2,\dots,n)$, то $\beta_k \ge 0$.

Теорема 2. Если функции $\varphi_k(s)\epsilon C[0,l]\cap C^2(0,l)$,

$\varphi_k(0)=\varphi_k(l)=\varphi_k^{'}(0)=\varphi_k^{'}(l)=0, \psi_{k,k}(x)\epsilon C\left[\left(2k+\frac{1}{2}\right)\tau,(2k+1)\tau\right]$,

$\psi'_{k,k}(x), \psi''_{k,k}(x), \psi_{k,k+1}(x)\epsilon C\left[(2k+1)\tau,\left(2k+\frac{3}{2}\right)\tau\right], \psi'_{k,k+1}(x), \psi''_{k,k+1}(x)$ принадлежат классу Гельдера внутри $\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\tau,(2k+1)\tau\right)$, $\left((2k+1)\tau,\left(2k+\frac{3}{2}\right)\tau\right)$ соответственно, то существует в области D регулярное решение задачи G_0 для уравнения (1_0).

Лемма 3. Если $\omega(x)\in C[0,2(n+1)\tau]\cap C^2(0,2(n+1)\tau),\ x\neq 2k\tau$, $\nu(x)\in C^1(0,2(n+1)\tau), x\neq 2k\tau$, то единственное решение $u(x,y)\in C(\overline{D}^-)\cap C^2(D^-)$ задачи Коши для уравнения (1_0) в области D^-, удовлетворяющее условиям $u(x,0)=\omega(x),\ 0\le x\le 2(n+1)\tau, u_y(x,0)=\nu(x)$, $0<x<2(n+1)\tau, x\neq 2k\tau$, представимо формулой

$$u^-(x,y)=\{u_k^-(x,y),(x,y)\in D_k^-\ (k=0,1,2,\dots,n)\},$$

в которой

$$u_k^-(x,y)=\Phi(x,y)H(x)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int_0^{x-m\tau}\eta((x-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}\Phi(\eta,y)d\eta\,,(x,y)\in D_k^-,$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}[z^{\omega}(x-y)+z^{\omega}(x+y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}z^{\nu}(\xi)d\xi,$$

а

$$z^{\omega}(x)=\omega(x)H(x)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int_0^{x-m\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\omega(\eta)d\eta,$$

$z^{\nu}(x)$ совпадает с $z^{\omega}(x)$, если заменить $\omega(x)$ на $\nu(x)$; $\gamma_m=(m!\,\Gamma(m)2^{2m-1})^{-1}$, причем $\Gamma(m)$ – Гамма-функция.

Лемма 4. Если $\varphi_k(s)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$,

$\nu(x)\in C^1(\bigcup_{k=0}^{n}(2k\tau,2(k+1)\tau))$, причем $\nu(x)$ может в точках $x=2k\tau$, $x=2(k+1)\tau$ обращаться в бесконечность порядка меньше единицы и удовлетворяет при $2k\tau<x<2(k+1)\tau$ условию Гельдера, а $\varphi_k(0)=\varphi_{k+1}(l)$, то существует регулярное решение $u(x,y)$ задачи Неймана-Дирихле для уравнения (1_0), удовлетворяющее условиям $u(x,y)|_{\rho_k} = \varphi_k(s), 0 \leq s \leq l$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, $u_y(x,y)\big|_{y=0} = \nu(x)$, $0 < x < 2(n+1)\tau, x \neq 2k\tau$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ в области D^+, в форме

$$u^+(x,y) = \{u_k^+(x,y), (x,y) \in D_k^+ \ (k = 0,1,2,\ldots,n)\},$$

$$u_k^+(x,y) = u_{0k}(x,y) - \iint\limits_{D_k^+} u_{k-1}(\xi - 2\tau, \eta) G_k(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \, , (x,y) \in D_k^+,$$

где

$$u_{0k}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau} \nu(t) G_k(t,0;x,y) dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho_k} \varphi_k(s) \frac{\partial}{\partial N} G_k(\xi(s), \eta(s); x, y) ds,$$

а $$G_k(x,y;x_0,y_0) = \ln \frac{\bar{r}_k \bar{r}_{1k} \rho_k^2}{\tau^2 r r_1}$$ – функция Грина,

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - x_0)^2 + (y \mp y_0)^2, \ \left.\begin{matrix} \bar{r}_k^2 \\ \bar{r}_{1k}^2 \end{matrix}\right\} = (x - (2k+1)\tau - \bar{x}_0)^2 + (y \mp \bar{y}_0)^2,$$

$$\bar{x}_0 = \frac{\tau^2}{\rho_k^2}(x_0 - (2k+1)\tau), \bar{y}_0 = \frac{\tau^2}{\rho_k^2} y_0, \rho_k^2 = (x_0 - (2k+1)\tau)^2 + y_0^2,$$

N – внутренняя нормаль границы.

Вопрос существования решения задачи Геллерстедта G_0 для уравнения (1_0) в области D сведен к разрешимости полных сингулярных интегральных уравнений с автоморфными ядрами, имеющих характеристическую часть вида

$$sgn(x - (2k+1)\tau)\nu(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{2k\tau}^{2(k+1)\tau} \nu(t) \left[\frac{1}{t - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{2k + 1 - \frac{t}{\tau}}{(2k+1)(t+x) - \frac{tx}{\tau} - 4k\tau(k+1)}\right] dt = \beta_k(x),$$

$$2k\tau < x < 2(k+1)\tau, x \neq (2k+1)\tau \ (k = 0,1,2,\ldots,n)\,,$$

где $\beta_k(x)-$ непрерывно дифференцируемая функция, принадлежащая классу Гельдера на $(2k\tau,(2k+1)\tau)$, $((2k+1)\tau,2(k+1)\tau)$. Регуляризация уравнений проводится методом аналитического продолжения в комплексную плоскость к краевой задаче Римана с индексом $\chi=0$.

Функция $\nu(x)$ принадлежит классу $C^1(2k\tau,2(k+1)\tau)$, при $x=2k\tau$, $x=2(k+1)\tau$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

§2. Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с дифференциально–разностным оператором в неограниченной области.

В области $D=D^+\cup D^-\cup I$, где $D^+=\{(x,y){:}\, x>0, 0<y<h\}=$
$=\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k^+$ $(0<h\equiv const)$ и $D^-=\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k^-$ $\left(D_k^-=D_{k,k}^-\cup D_{k,k+1}^-\right)-$ эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+=\{(x,y){:}\, k\tau<x<(k+1)\tau, 0<y<h\},$$

$$D_{k,k}^-=\left\{(x,y){:}\, k\tau-y<x<y+(b+k\tau), -\frac{b}{2}<y<0\right\},$$

$$D_{k,k+1}^-=\left\{(x,y){:}\,(b+k\tau)-y<x<y+(k+1)\tau, -\frac{\tau-b}{2}<y<0\right\}$$

$(0<b<\tau)$, $I=\{(x,y){:}\, 0<x<+\infty,\ y=0\}$

рассмотрим уравнение (1_1).

Регулярным решением в области D будем называть функцию $u(x,y)$, непрерывную в области D, имеющую непрерывные производные до второго порядка (включительно) всюду в области, кроме, быть может, точек $(k\tau,0)$, $(b+k\tau,0)$, в которых производные $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$ могут иметь особенности порядка меньше 1.

Задача G_1. Найти регулярное в области D решение уравнения (1_1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)|_{x=0}=0,\quad \lim_{x\to+\infty} u(x,y)=0,\qquad 0\le y\le h,$$

$$u(x,y)|_{y=k\tau-x}=\psi_{1k}(x), k\tau\le x\le\frac{b}{2}+k\tau,$$

$$u(x,y)|_{y=x-(k+1)\tau}=\psi_{2k}(x), \frac{b+(2k+1)\tau}{2}\le x\le(k+1)\tau,$$

$$u(x,y)|_{y=h}=\varphi(x), x\ge 0,$$

условиям сопряжения $u(x,-0)=u(x,+0)=\omega(x), x\ge 0$,

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x), x>0,$$

где $\varphi(x)$, $\psi_{1k}(x)$, $\psi_{2k}(x)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $\psi_{10}(0) = 0, \psi_{1k}(k\tau) = \psi_{2k-1}(k\tau)$ $(k = 1,2,\dots)$, $\varphi(0) = \varphi(+\infty) = 0$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x,y): k\tau < x < (k+1)\tau, y = 0\}$.

Теорема 1. Если существует регулярное решение задачи G_1 для уравнения (1_1) в области D, то при $\tau \le 1$ оно единственно.

Теорема 2. Если функции $\varphi(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\varphi(0) = \varphi(+\infty) = 0, \psi_{1k}(x) \in C\left[k\tau, \frac{b}{2} + k\tau\right] \cap C^2\left(k\tau, \frac{b}{2} + k\tau\right)$,

$$\psi_{2k}(x) \in C\left[\frac{b+(2k+1)\tau}{2}, (k+1)\tau\right] \cap C^2\left(\frac{b+(2k+1)\tau}{2}, (k+1)\tau\right)$$

и $\psi'_{1k}(x)$, $\psi'_{2k}(x)$, $\psi''_{1k}(x)$, $\psi''_{2k}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера внутри соответствующих промежутков, причем

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{\left[k\tau, \frac{b}{2}+k\tau\right]} |\psi_{1k}(x)| = 0, \lim_{k\to+\infty} \max_{\left[\frac{b+(2k+1)\tau}{2}, (k+1)\tau\right]} |\psi_{2k}(x)| = 0,$$

то существует в области D регулярное решение задачи G_1 для уравнения (1_1).

Доказательство теоремы единственности проводится с помощью энергетических неравенств.

Общее решение уравнения (1_1) в области D

$$u(x,y) = \{u_k(x,y), (x,y) \in D_k (k = 0,1,2,\dots)\},$$

$$u_k(x,y) = \Phi(x,y)H(x) +$$

$$+\sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int_0^{x-m\tau} \eta((x-m\tau)^2 - \eta^2)^{m-1} \Phi(\eta, y) d\eta,$$

$$\Phi(x,y) = g_1\left(x - y\sqrt{-sgny}\right) + g_2\left(x + y\sqrt{-sgny}\right),$$

$g_1(t), g_2(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, позволяет найти:

1) единственное решение $u^-(x,y) \in C(\overline{D}^-) \cap C^2(D^-)$ задачи Коши для уравнения (1_1), удовлетворяющее условиям $u^-(x,y)|_{y=0} = \omega(x)$, $0 \le x < +\infty$, $u_y^-(x,y)|_{y=0} = \nu(x), 0 < x < +\infty, x \ne k\tau$ в области D^-

$$u^-(x,y) = \{u_k^-(x,y), (x,y) \in D_k^- \ (k = 0,1,2,\dots)\},$$

$$u_k^-(x,y) = \sum_{m=0}^{k} \bar{\gamma}_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} I_{0,x-m\tau;0}^m \Phi(x,y),$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}[z^{\omega}(x-y)+z^{\omega}(x+y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} z^{\nu}(\xi)d\xi,$$

а

$$I_{0,x-m\tau;\alpha}^{m}\Phi(x,y)=\frac{2}{\Gamma(m)}\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta((x-m\tau+\alpha)^2-(\eta+\alpha)^2)^{m-1}\Phi(\eta,y)d\eta -$$

интеграл Эрдейи-Кобера, $\bar{\gamma}_m=(m!\ 2^{2m})^{-1}$,

причем

$$z^{w}(x)=\{z_k^{w}(x), k\tau\le x\le (k+1)\tau\ (k=0,1,2,\dots)\},$$

$$z_k^{w}(x)=w(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m 2^{m-1}(m-1)!\,\gamma_m H(x-m\tau)x^{m-1}(x-m\tau)\times$$

$$\times\, w(x-m\tau)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta w(\eta)\frac{d^m}{d\eta^m}(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}d\eta,$$

а $w=\omega,\nu$; $\gamma_m=(m!\,\Gamma(m)2^{2m-1})^{-1}$;

2) единственное решение $u^{+}(x,y)\in C(\bar{D}^{+})\cap C^{2}(D^{+})$ задачи Дирихле для уравнения (1_1), удовлетворяющее условиям $u^{+}(0,y)=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}u^{+}(x,y)=0, 0\le y\le h;\quad u^{+}(x,0)=\omega(x), u^{+}(x,h)=\varphi(x), x\ge 0$

в области D^{+}

$$u^{+}(x,y)=\{u_k^{+}(x,y),(x,y)\epsilon D_k^{+}\ (k=0,1,2,\dots)\},$$

где

$$u_k^{+}(x,y)=\sum_{m=0}^{k}\bar{\gamma}_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m}I_{0,x-m\tau;0}^{m}\mathrm{T}(x,y),$$

$$\mathrm{T}(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(R_x^{i(h(2n+1)-y)}-R_x^{i(h(2n+1)+y)}\right)z^{\varphi}(x)+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(R_x^{i(2nh+y)}-R_x^{i(2h(n+1)-y)}\right)z^{\omega}(x)=$$

$$=\frac{\sin\frac{y\pi}{h}}{2h}\int\limits_{0}^{+\infty}z^{\varphi}(\xi)\left[\frac{1}{ch\frac{(\xi-x)\pi}{h}+\cos\frac{y\pi}{h}}-\frac{1}{ch\frac{(\xi+x)\pi}{h}+\cos\frac{y\pi}{h}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{\sin\frac{y\pi}{h}}{2h}\int\limits_{0}^{+\infty} z^{\omega}(\xi)\left[\frac{1}{ch\frac{(\xi-x)\pi}{h}-\cos\frac{y\pi}{h}}-\frac{1}{ch\frac{(\xi+x)\pi}{h}-\cos\frac{y\pi}{h}}\right]d\xi,$$

а $z^{\varphi}(x)$, $z^{\omega}(x)$ определяются приведенной выше формулой для $z^{w}(x)$ при $w=\varphi,\omega$.

Вопрос существования решения задачи G_1 сводится к разрешимости разностного уравнения $z_k^{\nu}(x)=isgn\big(x-(b+k\tau)\big)R_x^{2ih}z_k^{\nu}(x)+g_k(x)$, $k\tau<x<(k+1)\tau, x\neq b+k\tau$, где $g_k(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$.

Глава II изучает уравнение Лаврентьева-Бицадзе с опережающе-запаздывающим аргументом искомой функции и ее производных первого порядка в ограниченных областях.

§3. Задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанным отклонением аргумента.

Исследуется «внутренняя» задача Геллерстедта для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части и опережающе-запаздывающим некарлемановским сосредоточенным отклонением в искомой функции и её производной первого порядка (1_2).

Пусть $D=D^+\cup D^-\cup I$, где

$D^+=\{(x,y):0<x<2\tau, 0<y<h\}=D_0^+\cup D_1^+\cup J$,

$D^-=\bigcup_{k=0}^{1}D_k^-$ $\left(D_k^-=D_{k,k}^-\cup D_{k,k+1}^-\right)$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем $D_k^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau, 0<y<h\}$,

$$D_{k,k}^-=\left\{(x,y):k\tau-y<x<y+x_k,-\frac{x_k-k\tau}{2}<y<0\right\},$$

$$D_{k,k+1}^-=\left\{(x,y):x_k-y<x<(k+1)\tau+y,-\frac{(k+1)\tau-x_k}{2}<y<0\right\},$$

$k\tau<x_k<(k+1)\tau$ $(k=0,1)$,

$I=\{(x,y):0<x<2\tau,\ y=0\}=\bigcup_{k=0}^{1}I_k$, $\quad J=\{(x,y):x=\tau, 0<y<h\}$.

Обозначим $D_k=D_k^+\cup D_k^-\cup I_k$, где $I_k=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau, y=0\}$ $(k=0,1)$.

Задача $\boldsymbol{G_2}$. Найти в области D функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\setminus J)\cap C^2(D\setminus(J\cup I))$, удовлетворяющую уравнению (1_2), краевым условиям

$u(0,y)=u(2\tau,y)=0, 0\leq y\leq h; u(x,h)=\varphi(x), 0\leq x\leq 2\tau,$

$u(x, x-x_k) = \psi_k(x), \dfrac{k\tau + x_k}{2} \le x \le x_k,$

$u(x, x_k - x) = \rho_k(x), x_k \le x \le \dfrac{x_k + (k+1)\tau}{2},$

условиям сопряжения $u(x,-0) = u(x,+0) = \omega(x), 0 \le x \le 2\tau,$

$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), 0 < x < 2\tau, x \ne \tau,$

условиям согласования $\varphi(0) = \varphi(2\tau) = 0,\ \psi_k(x_k) = \rho_k(x_k)\ \ (k = 0{,}1),$

где $\varphi(x), \psi_k(x), \rho_k(x)$ $(k = 0{,}1) -$ заданные непрерывные, достаточно гладкие функции.

Теорема. Если функции $\varphi(x) \in C[0{,}2\tau] \cap C^2(0{,}2\tau),$

$\psi_k(x) \in C\left[\dfrac{k\tau + x_k}{2}, x_k\right] \cap C^2\left(\dfrac{k\tau + x_k}{2}, x_k\right),$

$\rho_k(x) \in C\left[x_k, \dfrac{x_k + (k+1)\tau}{2}\right] \cap C^2\left(x_k, \dfrac{x_k + (k+1)\tau}{2}\right) (k\ =\ 0{,}1),$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках, $\varphi(0) = \varphi(2\tau) = 0,$ $\psi_k(x_k) = \rho_k(x_k)$ и $\psi_k{}'(x),\ \rho_k{}'(x)$ при $x \to x_k\ (k\ =\ 0{,}1)$ допускают интегрируемую особенность, то существует единственное при $\tau \le \sqrt{2}$ решение $u\ (x,y)$ задачи G_2.

Единственность решения задачи G_2 доказывается с помощью энергетических неравенств.

Если $u_k(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_k (k = 0{,}1),$ то уравнение (1_2) редуцируется к системе

$$\begin{cases} L\bar{u}(x,y) = 0, (x,y) \in D_0, \\ L\bar{\bar{u}}(x,y) + 2\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\right)\bar{\bar{u}}(x,y) = 0, (x,y) \in D_0, \end{cases}$$

где

$\bar{u}(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x+\tau, y), \bar{\bar{u}}(x,y) = u_0(x,y) - u_1(x+\tau, y), (x,y) \in D_0,$

общее решение которой

$$u_k(x,y) = \left(f\left(x - k\tau - y\sqrt{-sgny}\right) + g\left(x - k\tau + y\sqrt{-sgny}\right)\right) \times$$
$$\times \left(1 + (-1)^k e^{-(x-k\tau)}\right), (x,y) \in D_k (k = 0{,}1),$$

$f(t), g(t) -$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, приводит к формуле типа Даламбера

$$u_k^-(x,y)=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k e^{-(x-k\tau)}\right)\left[\frac{\omega(x-y)}{1+(-1)^k e^{-(x-k\tau-y)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega(x+y)}{1+(-1)^k e^{-(x-k\tau+y)}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k e^{-(x-k\tau)}\right)\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{\nu(\xi)d\xi}{1+(-1)^k e^{-(\xi-k\tau)}}\quad (k=0{,}1),$$

представляющей решение задачи Коши для уравнения (1_2) из класса $C(\overline{D}_k^-)\cap C^2(D_k^-)$ в области D_k^- $(k=0{,}1)$, когда $\omega(x)\in C[k\tau,(k+1)\tau]\cap$ $\cap\, C^2(k\tau,(k+1)\tau)$, $\nu(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k=0{,}1)$ и решению задачи Дирихле в D_k^+ $(k=0{,}1)$

$$u_k^+(x,y)=\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left(\frac{1+(-1)^k e^{-(x-k\tau)}}{1+(-1)^k e^{-(\xi-k\tau)}}\right)\varphi(\xi)G(x,y,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\left(\frac{1+(-1)^k e^{-(x-k\tau)}}{1+(-1)^k e^{-(\xi-k\tau)}}\right)\omega(\xi)G(x,h-y,\xi)d\xi\quad (k=0{,}1),$$

где $G(x,y,\xi)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Вопрос существования решения задачи G_2 в областях $D_k=D_k^+\cup D_k^-\cup I_k$ $(k=0{,}1)$ сведен к разрешимости разностного уравнения

$$\left(1+isgn(x-x_k)R_x^{2ih}\right)\left(\frac{\nu(x)}{1+(-1)^k e^{-(x-k\tau)}}\right)=\gamma_k(x),$$

$$k\tau<x<(k+1)\tau\quad (k=0{,}1),$$

где $\gamma_k(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k=0{,}1)$ и зависит от $\rho_k(x),\psi_k(x),\varphi(x)$.

Найденное значение функции $\nu(x)$ позволяет построить решение задачи G_2 для уравнения (1_2) в области D.

§4. Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом.

Для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с опережающе-запаздывающим аргументом искомой функции и ее производных первого порядка (1_3) доказывается теорема единственности и существования решения «внутренне-внешней» задачи Геллерстедта.

Пусть $D=D^+\cup D^-\cup I$, где
$D^+=\{(x,y):0<x<3\tau,0<y<h\}=\cup_{k=0}^2 D_k^+\cup_{n=1}^2 J_n$ $(0<h\equiv const)$ и

$D^{-} = \bigcup_{k=0}^{2} D_k^{-} -$ эллиптическая и гиперболическая части области D,

$D_k^{+} = \{(x,y):\ k\tau < x < (k+1)\tau, 0 < y < h\}$,

$D_k^{-} = \{(x,y):\ k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$ $(k = 0,1,2)$,

$I = \{(x,y): 0 < x < 3\tau, y = 0\} = \bigcup_{k=0}^{2} I_k$,

$J_n = \{(x,y): x = n\tau\ (n = 1,2), 0 < y < h\}$.

Обозначим $D_k = D_k^{+} \cup D_k^{-} \cup I_k$, где $I_k = \{(x,y): k\tau < x < (k+1)\tau, y = 0\}$ $(k = 0,1,2)$.

Задача G_3. Найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \backslash (J_1 \cup J_2)) \cap C^2(D \backslash (I \cup J_1 \cup J_2))$, удовлетворяющую уравнению (1_3), краевым условиям

$u(0,y) = u(3\tau,y) = 0, 0 \le y \le h;\ u(x,h) = \varphi(x), 0 \le x \le 3\tau$,

$$u(x, x-(k+1)\tau) = \psi_k(x), \frac{(2k+1)\tau}{2} \le x \le (k+1)\tau\ (k = 0,2),$$

$$u(x,\tau - x) = \psi_1(x), \tau \le x \le \frac{3\tau}{2},$$

условиям сопряжения $u\,(x,-0) = u(x,+0) = \omega(x), 0 \le x \le 3\tau$,

$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), 0 < x < 3\tau, x \ne \tau, 2\tau$,

условиям согласования $\varphi(0) = \varphi(3\tau) = 0,\ \psi_0(\tau) = \psi_1(\tau), \psi_2(3\tau) = 0$,

где $\varphi(x)$, $\psi_k(x) (k = 0,1,2)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции.

Теорема. Если функции $\varphi(x) \in C[0,3\tau] \cap C^2(0,3\tau)$, $\psi_k \in C\left[\frac{(2k+1)\tau}{2}, (k+1)\tau\right] \cap C^2\left(\frac{(2k+1)\tau}{2}, (k+1)\tau\right)$ $(k = 0,2)$, $\psi_1 \in C\left[\tau, \frac{3\tau}{2}\right] \cap C^2\left(\tau, \frac{3\tau}{2}\right)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках, $\varphi(0) = \varphi(3\tau) = 0$, $\psi_0(\tau) = \psi_1(\tau)$, $\psi_2(3\tau) = 0$ и $\psi_0'(x)$ при $x \to \tau$, $\psi_1'(x)$ при $x \to \tau$, $\psi_2'(x)$ при $x \to 3\tau$ допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение $u(x,y)$ задачи G_3.

Доказательство единственности решения задачи G_3 проводится с помощью энергетических неравенств.

Если $u_k(x,y) = u(x,y)$, $(x,y) \in D_k$ $(k = 0,1,2)$, то исходное опережающе-запаздывающее уравнение приводится к системе уравнений

$$L\bar{u}(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-sgny}\frac{\partial}{\partial y}\right)A\bar{u}(x,y),(x,y)\in D_0,$$

где

$$\bar{u}(x,y)=(u_0(x,y),u_1(x+\tau,y),u_2(x+2\tau,y)\,)^T,\ \ (x,y)\in D_0,$$

а

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$u_k(x,y)=f(x-k\tau-y(\sqrt{-sgny})^3)+$$

$$+g\left(x-k\tau+y\left(\sqrt{-sgny}\right)^3\right)\alpha_k(x-k\tau),\ \ (x,y)\in D_k\ (k=0,1,2),$$

$$\alpha_0(x)=\alpha_2(x)=e^{-x}\left(ch\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}sh\sqrt{2}x\right),\alpha_1(x)=e^{-x}\left(ch\sqrt{2}x+\sqrt{2}sh\sqrt{2}x\right),$$

$f(t),g(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, дает возможность найти решение задачи Коши для уравнения (1_3) из класса $C(\bar{D}_k^-)\cap C^2(D_k^-)$ в области D_k^- $(k=0,1,2)$ при $\omega(x)\in C[k\tau,(k+1)\tau]\cap$ $\cap\, C^2(k\tau,(k+1)\tau)$, $\nu(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k=0,1,2)$ в форме типа Даламбера

$$u_k^-(x,y)=\omega(x-y)-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k(x-k\tau-y)}\int_{k\tau}^{x-y}\frac{\nu(\xi)+\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau+y)}}\int_{k\tau}^{x+y}\frac{\nu(\xi)+\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi\quad(k=0,1,2)\,,$$

а также решение задачи Дирихле в $D_k^+(k=0,1,2)$

$$u_k^+(x,y)=\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\omega(\xi)G_1(x,y,\xi)d\xi+$$

$$+\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\varphi(\xi)G_2(x,y,\xi)d\xi,$$

где $G_j(x,y,\xi)$ $(j=1,2)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Вопрос существования решения задачи G_3 в областях $D_k=D_k^+\cup D_k^-\cup I_k$ $(k=0,1,2)$ сведен к разрешимости интегро-разностного уравнения

$$g_k(x) - i\, sgn\big((x-\tau)(x-2\tau)\big)\bar{B}_{kx}((I + Q_{kx})g_k(x)) = \gamma_k(x),$$
$$k\tau < x < (k+1)\tau \ (k = 0,1,2),$$

где

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}} \int_{k\tau}^{x} \frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} \ (k = 0,1,2),$$

$$\bar{B}_{kx} = \frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} R_x^{2ih},$$

$$Q_{kx}\big(g_k(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{i+1}{2} \dfrac{1}{\alpha_k(x-k\tau-ih)} R_x^{-2ih} \displaystyle\int_{k\tau}^{x} \alpha_k'(t-k\tau) g_k(t)dt, \\ \qquad\qquad\qquad k\tau < x < (k+1)\tau \ (k = 0,2), \\ \dfrac{1-i}{2} \displaystyle\int_{\tau}^{x} \dfrac{\alpha_1'(t-\tau)}{\alpha_1(t-\tau)} g_1(t)dt, \quad \tau < x < 2\tau \ (k = 1), \end{cases}$$

$I -$ тождественный оператор, $\gamma_k(x) \in C^2(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k = 0,1,2)$ и зависит от $\varphi(x), \psi_k(x)$.

Пользуясь случаем выражаю глубокую благодарность и признательность научному руководителю Александру Николаевичу Зарубину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

1. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с дифференциально-разностным оператором / *Е.В. Чаплыгина* // Вестник науки. – Орел: ОГУ, В.10, 2011. – С.189–193.
2. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с дифференциально-разностными операторами / *А.Н. Зарубин, Е.В. Чаплыгина* // 6-я Международная конференция «АМАДЕ-2011», 12–17 сентября 2011г., Минск (Белоруссия). – С.67–68.
3. *Чаплыгина, Е.В.* Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа / *А.Н. Зарубин, Е.В. Чаплыгина* // Всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» («СамДиф-2011»). Самара, 2011г. – С.45–46.
4. *Чаплыгина, Е.В.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с разностным и дифференциально-разностным оператором / *А.Н. Зарубин,*

Е.В. Чаплыгина // На 10-й Международной Казанской научной школе-конференции в Трудах математического центра им. Н.И. Лобачевского, Т.43, Казань, 2011.–С.144–147.

5. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с отражением и смешанным запаздыванием / *А.Н. Зарубин, Е.В. Чаплыгина* // Ученые записки Орловского государственного университета. Научный журнал. – Орел, ОГУ, №5 (43), 2011. – С.144–159.
6. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с кратным запаздыванием / *Е.В. Чаплыгина* // Международная конференция «Комплексный анализ и его приложение в дифференциальных уравнениях и теории чисел», Белгород, 17–21 октября 2011г. – С. 128-129.
7. *Чаплыгина, Е.В.* Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа в неограниченной пилообразной области / *А.Н. Зарубин, Е.В. Чаплыгина* // Современная математика: образование и наука. Международная научно-практическая конференция «Математика и ее приложения». – Орел: ОГУ, 2011. – С. 121–123.
8. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа / *А.Н. Зарубин, Е.В. Чаплыгина* // Вестник науки. – Орел: ОГУ, В. 11, 2012. – С.13–23.
9. *Чаплыгина, Е.В.* О задачах Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанным отклонением аргумента / *Е.В. Чаплыгина* // Вестник науки. – Орел: ОГУ, В. 11, 2012. – С.61–64.
10. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанным отклонением аргумента / *Е.В. Чаплыгина* // XIV Международная научная конференция им. акад. М. Кравчука, г. Киев (Украина). 19–21 апреля 2012г. – С.435–436.
11. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для эллиптико-гиперболического уравнения со смешанным отклонениям аргумента / *Е.В. Чаплыгина* // Доклады Адыгейской Международной академии наук. 2012, том 14, номер 1. – С.116–123.
12. *Чаплыгина, Е.В.* Начально-краевая задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом / *Е.В. Чаплыгина* // 7-й Международный семинар «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ-2012), 11–14 сентября, 2012г., Минск (Белоруссия). – С. 71–72.
13. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего уравнения / *Е.В. Чаплыгина* // XI Белорусская математическая конференция, 5–9 ноября 2012г., Минск. – С. 89–90.

14. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего уравнения в ограниченной области / *Е.В. Чаплыгина* // Третья Международная конференция по математической физике и ее приложениям, 27 августа – 1 сентября 2012г., Самара. – С. 305–306.
15. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом / *Е.В. Чаплыгина* // Четвертая Международная конференция молодых ученых по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я.Б. Лопатинского, Донецк, Украина, 14–17 ноября 2012г. – С.89–90.
16. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа / *Е.В. Чаплыгина* // II Международная конференция молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», 28 ноября – 1 декабря 2012г, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик. – С.249–252.
17. *Чаплыгина, Е.В.* Задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанным отклонением аргумента в производных / *Е.В. Чаплыгина* // Научные ведомости БелГу. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №17(136). Вып.28. – С. 119–131.